Det er Umueligt, at nogen Mathematisk Størrelse kan være virkelig Uendelig, undersøgt og beviist

af
F. C. H. ARENTZ.

§. 1.

Det er unægteligt og noget, som aldrig modsiges, at urigtige Begreber og falske Forestillinger altid sætter Menneskerne i Fare for betydelige Vildfarelser. Vel er det saa, at et Begreb undertiden synes at være af meget ringe Følger og derfore og af meget ringe Betydenhed, om endog deri skulle være nogen Feiltagelse, men hvem tør staae inde for det? Man maatte da lidet kiende eller vide deels Sandhedernes vidt udstrakte Mangfoldighed, deels ogsaa deres forunderlige Sammenhæng indbyrdes. En liden Feiltagelse i det Begreb, Spinoza giorde sig om en Substance, bliver for ham en Grundvold til det hæssligste Systeme og føder af sig de allerfarligste og urigtigste Begreber om de allervigtigste Ting saasom Gud og Verden.

§. 2.

Undertiden skeer det og, at et saadant urigtigt Begreb længe kan passere uden at giøre nogen Skade og anvendt alleene paa et vist Slags Sandheder medfører ingen betydelig Feil. Peripheriens Forhold til sin Diameter i en Circul som 314:100 er urig-

tig,

tig, men det ville være rare Tilfælde, hvor den ei skulle kunde bruges og legges til Grund for Beregninger, at jeg ikke skal nævne flere saadanne Exempler, som haves i Overflødighed. Og naar man i alle slige Tilfælde ikkun forestiller sig Sagen saadan, som den er, kan man end ikke engang sige, at der er nogen Vildfarelse i Begrebet, og de Sætninger, som derpaa videre bygges, bliver heller ingen Vildfarelse, naar man kun passer paa, at Feilen ikke bliver anderledes, end ganske ubetydelig, og at det overalt ikke udgives for andet, end det, der er behæftet med en saadan ubetydelig Feil.

§. 3.

Imidlertid bør man heri være meget varsom, da man ganske let og ligesom uformerkt kan hendrages til Forestillinger, som ere urigtige, saa at det Begreb, man paa et Sted ganske rigtig har forestillet sig, bliver paa et andet Sted meget urettelig anvendt. Grunden hertil ligger og meget ofte i urigtige Benævnelser af et Begreb, som man dog i visse Tilfælde kan bruge rigtig. Blant saadanne urigtige Begreber regner jeg det overalt omtalte **Mathematiske uendelige** eller det Begreb om en virkelig **uendelig Mathematisk Størrelse.** Intet Begreb i den hele Mathematique har været frugtbarere til Videnskabens Udbredelse, end dette, brugt paa sin rette Maade og i sin rette Betydning, men med alt dette indbefatter Benævnelsen selv en Modsigelse, hvilket endnu ikke kunde skade saa meget efter Ordsproget, Termini valent usu, ut nummi, men Benævnelsen har igien forøget Begrebet, saa at der vel er faa, som er frie for det Begreb om en virkelig absolute uendelig Mathematisk Størrelse, som noget, der kunde være muelig, hvilket videre er bleven anvendt uden for den pure Mathematique i andre Videnskaber og har der født Vildfarelser af sig. Det skal altsaa være mit Øiemerke ved nærværende liden Afhandling at vise den Urigtighed, der har for det meste været i denne Sag, og at det Begreb om en **uendelig Mathematisk Størrelse indbefatter en Umuelighed.**

§. 4.

En Mathematisk Størrelse (a) kalder jeg det, som kan modtage Tilvext eller Formindskelse; Saa snart man altsaa forestiller sig noget, som det der kunde blive mindre ved at tage noget derfra, eller større ved at legge noget dertil, har man det, som i den Henseende kan kaldes en Mathematisk Størrelse. Det som saaledes forestilles at kunde sættes til eller tages fra, maa i nogen Maade være af lige Beskaffenhed med det hvortil det settes eller fratages og kunde betragtes under et med samme, i saa Fald kaldes det en Deel; altsaa kan en Mathematisk Størrelse ikke tænkes uden enten, som det der kan være en Deel af noget, eller kan indbefatte Deele i sig. Det hvorved man udtrykker, om der er een Deel eller mere eller mindre, kaldes et Tal; altsaa lader og Mathematiske Størrelser sig udtrykke ved Tal og er det ligemeget enten samme er irrational eller rational. Naar en Deel er uden for den anden, kaldes det en extensive Størrelse, hvis derimod Delene ikke kan siges at være uden for hinanden, kaldes det en intensive Størrelse, i begge Tilfælde kan man forestille sig noget, der kan voxe eller formindskes og følgelig gives der ei allene extensives men endog intensives Mathematiske Størrelser. Saaledes eet og det samme Stykke Blye, som her veier 1 Pund, skulle paa Jupiters Overflade veie $2\frac{74}{431}$ Pund, men den Deel af samme Vegt, som var liig den paa vores Jord, kunde derfor ikke siges at være uden for den anden Deel, som var kommet dertil. Man fordrer heller ikke til en Mathematisk Størrelse, at der altid skal haves en tydelig Kundskab om dens Udmaaling, nok naar den kan tænkes at kunde være større eller mindre; saaledes er Luftens Varme en Mathematisk Størrelse, endog de til sammes Udmaaling brugelige Instrumenter ere mere Thermoscopia, end Thermometra. Endelig kan en Mathematisk

(a) Jeg bruger her de Benævnelser af Mathematisk Størrelse og Mathematisk Uendeligt, uden at sige Størrelse og Uendeligt i Almindelighed, da disse Termini i andre Tilfælde ogsaa maa bruges, endog det ikke er Mathematiske Størrelser, man taler.

matisk Størrelse ogsaa være enten bestemt eller ubestemt. Ubestemt kan den være i 2de Henseender, enten naar Delenes Antal eller naar deres Storhed ikke er bestemt, men derved er just at merke, at saasnart en Mathematisk Størrelse saaledes er ubestemt, da kan den under samme Navn være snart een, snart en anden og er ikke nødvendig og bestandig af samme Størrelse.

§. 5.

Der, hvor det reelle, som tilhører Tingen, ophører, siges at være dens Grændse. Enten har en Ting Grændse eller ingen Grændse; i første Fald kaldes den Endelig, i sidste Fald Uendelig. Hvis en Tings Grendse sættes meget vidt ud i Ligning mod en anden, saa at denne anden, uden betydelig Feil, i den Henseende kan ansees, som Intet, pleier man og at kalde den første **uendelig relative** eller Lignelsesviis mod den sidste, men er Indbegrebet af Realiteten saa stor at der aldeles ingen Grendse er, da har vi det som kaldes **absolute Uendeligt**. Det som formedelst sin Storhed ingen Grendser har, kaldes det **uendelige Store** og det som i Henseende til sin Lidenhed ingen Grendse har, kaldes det **uendelige Lidet**. Endelig kan man endnu forestille sig et Slags, som vel maa skilles fra det foregaaende, nemlig det **ubestemte Uendelige**, hvor man forestiller sig Tingens Grendser at udsættes, saa vidt man vil, og som man i den Henseende skulle ville kalde Uendeligt. Af dette forbunden med hvad som i næst foregaaende §. er sagt, sees, hvad en **Mathematisk Endelig** eller **uendelig** Størrelse skulle være.

§. 6.

For nu videre at sammenligne disse Begreber og at see, hvad deraf kan udkomme, merkes først, at det blodt **relative Uendelige** er intet Uendeligt, men absolute Endeligt, da det kan have endog en bestemt endelig Storhed og burde derfore ikke engang kaldes Uendeligt, da ubeqvemme Benævnelser ofte giver Anledning til urigtige Forestillelser. Efter mine Tanker, burde dette ikkun

kaldes

kaldes det overmaade Store, og som lidet, det umerkelige eller ukiendelige Lidet. Det ubestemte Uendelige kalder man saa, deels fordi man forestiller sig det enten overmaade Stort eller ukiendelig lidet, deels heller ikke fastsætter nogen Grendse enten for dets Storhed eller Lidenhed, men lader den gaae saa vidt den vil og altsaa troer man her at have et virkeligt Uendeligt. Men vi skal tydelig see, at endog dette er absolute Endeligt og intet Uendeligt. Det, at det er ubestemt kan aldrig giøre det Uendeligt; deraf følger kun, at man er ikke absolute bunden til een Bestemmelse, men at den foregivne Størrelse kan snart være meget større, snart igien noget mindre, da den ikke vedbliver at være eengang den samme, som en anden Gang. Med alt dette er den Endelig, hvor meget den formeres eller formindskes. Ikke heller kan dette giøre den Uendelig, at man kan sette den ukiendelig liden eller overmaade stor; thi disse ere og intet andet, end endelige Størrelser i sin Natur. Der bliver altsaa intet tilbage, der kunde berettige nogen til af de ubestemte Størrelser at udbringe noget Uendeligt; thi, om man end blandt andre Bestemmelser ogsaa ville sætte denne, nemlig at være absolute Uendelig, saa var dette kun at bestemme et vist prædicat, som endnu ikke var afgiort, om det var mueligt og som nødvendig medfører at Størrelsen alligevel er ubestemt; thi som en Mathematisk Størrelse at være en bestemt Deel af noget eller indbefatte et bestemt antal Deele og dog være Uendelig, sees strax at være en aabenbare Modsigelse. Desuden saasnart, som vi endog af andre Grunde viser (som i det følgende skal skee) at en absolute uendelig Mathematisk Storhed er umuelig, saa falder det af sig selv, at den Bestemmelse ikke nogensinde kan have Sted, og at man i øvrigt kan sette ubestemt saa stort og saa lidet man vil, men deraf bliver aldrig noget virkelig Uendeligt, men allene noget overmaade Stort eller ukiendelig Lidet. Deraf følger og at disse samme Størrelser gierne uden Modsigelse kan formeres, fordobbles, formindskes ꝛc. men saadant er en Modsigelse i det absolute Uendelige.

§. 7.

For nu at vise at det Mathematiske Uendelige er en Umuelighed, skal vi ei allene see, at det i sig selv indbefatter Modsigelser, men det skal og vises, at Mathematiquen intet fremviser, som berettiger os til at troe Muelighеden af et saadant Begreb. Enhver Mathematisk Størrelse kan formeres eller formindskes og den er at ansee, som den, der enten selv kan være en Deel af noget eller indbefatte Deele i sig (§. 4.) Sæt altsaa at en saadan Mathematisk Størrelse tillige skal være uendelig stor eller liden. Er den uendelig stor, da maa den alligevel som en Mathematisk Størrelse have sine Deele. Disse ere da hver for sig enten absolute Uendelige eller endelige Størrelser. Det første kan ikke være, thi hvorledes vil man legge 2 eller flere absolute uendelige Størrelser til hinanden? det dobble er jo større end det enkle? og hvorledes kunde det blive uendelig stort, som kunde være en Deel af et større? Dets Grændser kunde jo udvides og altsaa havde man ikke en absolute Uendelighed. Desuden, om man end ville tilstaae, at det uendelige var sammensat af uendelige Deele, maatte dog disse tilsidst opløses i lutter endelige Deele, som altid kan tænkes, hvor der er Mathematiske Størrelser. Vi seer altsaa, at endog den Mathematiske saa kaldede uendelige Størrelse maatte bestaae af endelige Størrelser, om de endog vare relative uendelige eller rettere sagt overmaade store. Vi vil derfore undersøge, om den absolute uendelige Størrelse kunde være sammensat af endelige Deele og skal da finde, at dette ligeledes er sig selv modsigende. Disse endelige Deele maatte da være tilstæde enten i et endeligt eller absolute uendeligt Antal. Sætter vi det første, tilstaaer enhver lettelig, at deraf ikke kan komme noget absolute uendeligt; altsaa maa man antage det sidste, nemlig at den Mathematiske uendelige Størrelse bestaaer vel af endelige Deele, men som dog vare samlede i et uendeligt Antal. Men at jeg ikke skal tale om, at, naar man paa denne Maade ville bevise Muelighеden af en uendelig Mathematisk Størrelse, begik man en circulum eller petitionem principii; thi et absolute uendeligt Tal er selv umueligt og man sætter

saaledes

saaledes forud just det, som skulle bevises; saa kan man endog desuden bevise, at det indbefatter en Modsigelse. Man behøver kun at forestille sig at een eller flere af disse endelige Deele bliver forøget og større, derved voxer det heele og hvor gaaer det da med det absolute uendelige, som før var? kan altsaa den saa kaldede Mathematiske uendelige Størrelse hverken være sammensat af endelige eller uendelige Deele, er den umuelig; heraf sluttes da videre: Enhver Mathematisk Størrelse maa enten være absolute endelig eller absolute uendelig, det sidste er beviist at være umueligt; altsaa er enhver Mathematisk Størrelse absolute endelig, da et Tertium eller Medium imellem disse kan ikke tænkes, som og af det følgende videre skal sees.

§. 8.

Samme Beskaffenhed har det med det, som skulle kaldes absolute uendelig lidet. Grendserne for dets Ringhed synes endog lettere at kunde kiendes; thi naar det saaledes forringes, at der bliver intet tilbage, er man ikke kommet til et absolute uendelig lidet, men til et absolute intet. Desuden, naar man har beviist at det uendelige store er umueligt, er ved det samme og beviist, at det uendelige lidet er umueligt; thi dette kan ikke tænkes anderledes, end, som en Deel af det heele, saa at det Forhold, som det heele havde til saadan Deel, var absolute uendelig stort, da nu dette er bevist at være umueligt, er og det absolute uendelige lidet umueligt.

§. 9.

At kunde ansees, som en Deel af noget, eller som det, der under sig indbefatter Deele, kan ikke andet, end medføre en absolute Endelighed; thi der er intet, som hindrer at jo noget kan tages fra eller lægges til. Sæt at noget fratages, da lader det jo af at være uendeligt og det maatte da igien kunde blive uendeligt ved at faae en endelig Deel tillagt, hvilket er umueligt; Det samme gielder og om Nævneren, som var fornøden til at udtrykke det uendelige lidet, saa at, saa snart som dette skulle kunne være en Deel af noget større, maatte det nødvendig have et endeligt Forhold til det heele og var altsaa ikke absolute uendelig lidet. Man lader sig kun forføre, ved at slutte fra det muelige til det umuelige. De Deele, som indeholdes i det foregivne Mathematiske Uendelige, har deres Grendser, disse forestiller man sig at kunde udvides, men mon deraf kommer noget uendeligt, om man nok saa meget udflytter dem? Det vedbliver just derved at være endeligt. Men i det man saaledes er i Arbeide med at udflytte Grendserne, giør man et Spring til det uendelige eller umuelige, forestillende sig, at Grendserne saaledes bleve udflyttede, at der ingen Grendser mere var, men mon man ikke herved antager det umuelige som mueligt, just da man vil bevise dets Mulighed? og mon ikke alt dette sætter forud et uendeligt antal Deele og saadant mere, som i sig selv er umueligt? Ja, mon man ikke paa eengang baade sætter og nægter Grendser, naar man forestiller sig Grendserne af det endelige at udflyttes, til de lader af at være Grendser? Det er paa eengang at have dem og ikke have dem, da Udvidelsen af dem, den maatte gaae saa vidt, den ville, ophæver ikke deres Natur og Væsen. End videre enhver virkelig Ting, der ansees som een, er aldeles bestemt, altsaa maa og enhver enkelt Mathematisk Størrelse, som bestaaer af Deele, have sit bestemte antal Deele, thi ellers kunde det jo være større eller mindre (jeg sætter at Delenes egen Størrelse derhos ikke forandres) og blev altsaa ikke den samme Størrelse (§. 4.) men et bestemt og tillige uendeligt antal indbefatter en Modsigelse (§. 6.) foruden at et uendeligt Tal for sig selv er umueligt, som end videre i det følgende skal vises.

§. 10.

Der er og de Mathematici, som har forestillet sig, at en uendelig Mathematisk Størrelse kan vel modtage Tilvext og Formindskelse, men ikke uden saadanne, som vare uendelige. Hvis saadant skulle forstaaes om det absolute uendelige, da var det en aabenbare Modsigelse, at det skulle kunde faae enten en endelig eller

uendelig

uendelig Tilvext (§. 7.) Man kan altsaa derved ikke have forstaaet andet, end det relative uendelige og vil da kun sige saa meget, at, naar en Størrelse har naaet sin relative Uendelighed, eller rettere sagt sin relative overmaade Storhed, da er det ubetydeligt (men derfor ikke absolute intet) hvad man ville lægge til eller tage derfra, naar det samme havde en ukiendelig liden Forhold til det, der allerede var bleven overmaade stort og en kiendelig Tilvext kunde altsaa ikke skee uden ved Tillæg af det relative overmaade store. Derfore kan og de sædvanlige Regne-Kunstens Operationer der have Sted (§. 6.) men ville nogen af de Udtryk og Ord, som ved slige Leiligheder bruges, slutte til noget absolute uendeligt, forfalder man til aabenbare Modsigelser.

§. 11.

Blandt andet, som har kommet Mathematici eller andre til at falde paa et Begreb om en uendelig Mathematisk Størrelse har ogsaa været dette, at man rigtig nok har forestillet sig den, som noget der kunde voxe og jo mere Tillæg den fik, jo større blev den; Sæt altsaa, at denne Tilvext skede fort frem uden Ende, saa blev omsider en absolute uendelig Størrelse muelig, men intet mindre end dette. Det giver os meget mere Begreb om enhver Mathematisk Størrelses Endelighed, end Uendelighed. Her sættes at Størrelsen skal voxe uden Ende, naar dette skeer, saa kan dens uendelige Tilvext eller Storhed jo aldrig opnaaes? og altsaa, om den voxer nok saa meget uden Ophør og Ende, bliver den endnu absolute endelig, som og alt er viist i det foregaaende. Ilde forstaaede Udtryk er og her Skyld i Begrebets Urigtighed; thi der er stor Forskiæl paa at være virkelig **uendelig** og at **ikke endes** eller at **voxe uden Ende**, som maaskee rettere kunde kaldes **uden Ophør**. Det sidste indbefatter kun en Fortgang, som, hvorvidt den end kommer, dog alle Tider har sine Grendser og bliver altsaa aldrig uendelig.

§. 12.

Naar man nu saaledes ved Størrelsernes fortgaaende Tilvext ikke kan komme til det Begreb om en absolute uendelig Mathematisk

matisk Størrelse, ville man maaskee give Slip paa sin Fordring at bringe det til Tydelighed paa den Maade, man ville da vel heller forestille sig det som noget, der allerede var uendeligt uden at genereres ved en bestandig Tilvext og derved ville man falde paa det Begreb om det uendelige, som man almindelig har, nemlig, at det er det som allerede er omni dabili majus eller minus. Dette er en Maade, paa hvilken endog de Gamle har villet forestille det Mathematiske uendelige og fortiener at tages i Overveielse, da det synes at have Skin af Rigtighed, endog det i Grunden er falskt og modsigende. Imidlertid fremstilles dette undertiden, som det Begreb, man kan giøre sig om det absolute uendelige, undertiden som noget, der kun skulle være relative uendeligt og er man altsaa ikke gandske sikker paa hvorledes det skal forstaaes. Men det maa forstaaes, hvordan det vil, saa er det overalt umueligt, at en Mathematisk Størrelse skulle være omni dabili major eller minor. Enten er denne foregivne Størrelse bestemt eller ubestemt. Er den bestemt, da sees strax, at den selv er een iblandt dabiles og følgelig, naar man siger, at den skulle være større, end enhver dabiles, er det just det samme som om man sagde, den skulle være større end den er selv og det at den var den største iblandt dem giør den ikke uendelig; thi er den bestemt har den sine Grendser og er endelig og kunde ikke være den største, som var muelig. Er den derimod ubestemt, da vil det intet andet sige, end at man har Frihed under visse Betingelser at antage hvilken Størrelse, man vil og derhos altid tænke den foregivne at kunde være større eller mindre, men mon dette er at være omni dabili major? den bliver jo ikke bestandig den samme Størrelse? Vil man sige: Den sidste, man paa saadan Maade kunde komme til, var den uendelige, saa blev den derved bestemt og følgelig var selv inter dabiles og mon det ikke er just det, som er umueligt, at komme til den sidste eller at een skulle være den sidste?

§. 13.

Vi har altsaa allerede seet at det Begreb om en Mathematisk absolute uendelig Størrelse er umueligt, endog man paa een

eller

eller anden Maade har villet søge at komme til et saadant Begreb og ved Fictioner at bringe det frem, hvilke alle indbefatter Modsigelser. Det er gaaet hermed, ligesom i andre Tilfælde, hvor man i Mathematiquen betienende sig af de sædvanlige og muelige Maader i at behandle og forandre Størrelser, dog omsider ved disses Sammensættelse forfalder til det umuelige (§. 9.) saasom lad a betegne, hvilken muelig Størrelse, man vil, da bliver Qvadrat-Roden af samme, nemlig $\sqrt{a}$, en muelig Størrelse; den samme a negative taget bliver og muelig, ikke destomindre bliver det, som enhver veed, en Umuelighed, i Fald man ville giøre Forbindelsen paa den Maade at sætte $\sqrt{-a}$, ligesom det er bekiendt at der i Algebraiske Æqvationer kan indeholdes baade muelige og umuelige Radices, men ingen siger derfore, at de alle ere muelige, endog man synes paa een og den samme Maade at lede sig frem til den eene, som til den anden. Nu vil vi da gaae videre og see at Mathematiquen ikke anviser os noget, som kan give os et virkeligt Begreb om det Mathematiske uendelige.

§. 14.

For det første har Arithmetiquen intet at fremvise, som skulle være absolute uendeligt. Tallenes almindelige Natur indbefatter intet saadant. Deres Formerelse over Eenheden, som udgiør deres Mangfoldighed, saavelsom Formindskelse kan gaae fort uden Ende og just denne Egenskab, som vel ingen negter, giør at et absolute uendeligt Tal eller Mangfoldighed er umueligt, endog det er den Egenskab, som lettest skulle forføre nogen til at tænke Muel igheden af et absolute uendeligt Tal. Men jeg paastaaer at den Egenskab at ikke kunde endes er det, som just giør et uendeligt Tal eller Mangfoldighed umuelig; thi kan dets Fortgang ikke endes, saa bliver alletider et Tillæg mueligt, skeer dette, saa er der intet uendeligt og kan ikke engang tænkes at være. Ja lad os eengang forestille os et uendeligt Tal eller Mangfoldighed, saa kunde jeg jo forestille mig enhver Eenhed i disse at være deelt i toe eller flere og lade saa hver af disse Deele ansees for Eenheder, derved ville et langt større Tal udkomme og hvor blev da det første absolute uendelige Tal og Mangfoldighed af?

Jeg behøver neppe at nævne at de arbitraires signa, man giør sig, for at betegne det uendelige store, saasom ∞ og det uendelige lidet, som $\frac{1}{\infty}$ giør intet til Sagen; thi saa længe disse Signa skal være rimelige, betegner da intet uden relatives overmaade store eller ukiendelig ringe Størrelser, hvorover man heller ikke tager i Betænkning at formere dem og formindske dem paa mangfoldige Maader, saasom $\infty + \infty$, ∞^{∞}, $\sqrt{\infty}$, $\frac{1}{\infty^{\infty}}$, $\frac{1}{\infty+\infty}$ ꝛc. som just viser at deri ligger intet absolute uendeligt, ja man kaster ofte nogle af disse Slags Uendeligheder bort i ligning mod andre, som er større. Og hvor er da det absolute uendelige Tal?

§. 15.

Men det maatte maaskee falde nogen ind, at man paa følgende Maade i Arithmetiquen kunde udtrykke og forestille sig det absolute uendelige: Lad os forestille os det Forhold $\frac{1}{x}$ og derhos sætte at x formindskes, jo mindre den bliver, jo større bliver Forholdet, sæt altsaa at x omsider bliver $=0$, saa at vi faaer $\frac{1}{0}$, mon ikke Forholdet da skulle være voxet til noget absolute uendeligt? Nei ingenlunde; thi i Fald det havde nogen Betydning, som var virkelig, kunde endog denne Forhold forøges ved at giøre Tælleren større, men i sig selv har det Udtryk $\frac{1}{0}$ betragtet uden Sammenhæng med noget foregaaende intet mere at betyde, end $0+1$ eller $\frac{0}{1}$; thi det vil da just sige dette, at der er slet intet, som har Relation til den endelige Størrelse, hvilket betyder noget langt andet, end at en uendelig liden Størrelse skulle have saadant Forhold. Betragter man det derimod, som noget, der er generéret af en formindskende Nævner, da gaaer det an at sætte O i Steden for en overmaade liden og formindskende Størrelse, som tillige er ubestemt og da bliver $\frac{1}{0} = \frac{1}{\frac{1}{\infty}} = \infty$, som er intet absolute uendeligt.

§. 16.

§. 16.

Blandt de Maader, paa hvilke man i Arithmetiquen har villet komme til det uendelige er og denne: Man siger sæt A:B = 1:0, dernæst B:y = 1:m, da baade B, y og m skal forestille endelige Størrelser, saa bliver ved Sammensættelse A:y = 1:0 + m = 1:0 og altsaa A uendelig mod y, da man nu kunde sætte y = enhver endelig Størrelse, sluttes deraf at A bliver større, end enhver endelig Størrelse og altsaa skulle den selv blive absolute uendelig, men hvem seer ikke at just det, som skulle bevises, legges til Grund nemlig at A:B = 1:0 hvilket Forhold er i sig selv absolute umueligt (§. 15.) saa længe A og B skal være virkelige Størrelser. At Forholdet mellem A og B undertiden gierne kan uden Fare settes at være noget nær det samme, som 1:0, nægtes ikke, men det bliver aldrig Grund til nogen absolute Uendelighed. Desuden falder det i sig selv ud til det samme, som en Størrelse, der skulle være omni dabili major, hvorom allerede er talt §. 12.

§. 17.

Blandt andre Ting, som maaskee skulle komme een til at giøre sig nogen Tanke om det absolute uendelige, ere de saa kaldte uendelige Rækker, hvorved endog endelige Størrelser undertiden forestilles, saasom en irrational Qvadrat-Rod eller anden Radix, den Række $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$ etc. hvis Summa er = 1 og mangfoldige andre saadanne Exempler. Deslige Rækker kan være voxende eller forminskende. Sæt at den voxer og at man derved omsider skulle komme til det uendelige, forlanger jeg at den hele Række skal Summeres, Summen blev da større end det sidste Leed, og hvorledes var da dette en absolute uendelig Størrelse? Endskiønt vi allerede i den 14 §. har seet at det er umueligt at komme til det absolute største eller mindste Leed. Men vi vil endog opsøge og anføre alt hvad der kunde siges til Forsvar for det absolute uendelige: Man skulle maaskee ville sige: En saadan Række, i Fald den er aftagende, kan blive af lige Storhed med en bestemt endelig Størrelse, dette kunde ikke skee, saa længe endnu noget Leed manglede; altsaa maa endog det uendelige lidet være muligt, som det der behøves til at fylde Rækken til en bestemt Størrelse. Ligeledes kunde man og maaskee giøre følgende Slutning: Af saadanne fortgaaende og formindskende Rækker sees at en Størrelse kan deles uden Ende; altsaa ligger der udi samme en Beqvemmelighed til en uendelig Deling og maa endog være et uendeligt antal Deele virkelig tilstede i den foregivne Størrelse for at kunde strække til den uendelige Deling. Men man bliver strax vaer, at herved forudsættes en uendelig Delings Mueligbed. Der er stor Forskiel paa at kunde deles fort frem uden Ophør og virkelig at deles i Uendelighed. Det sidste udfordrer et absolute uendeligt Antal, som er umueligt og altsaa sætter man just det forud, som skulle bevises. Derimod at kunde deles uden Ophør sætter intet andet forud, end at Deelene ere ubestemte. En Størrelse lader sig dele paa mangfoldige Maader, jo mindre Deele der tages, jo større bliver deres Tal, men uagtet man saaledes efter behag kan formindske Deelene og formere Tallet, kan man derved ikke komme enten til det uendelige lidet eller det uendelige store og er den virkelige uendelige Delelighed umuelig, hvor vil man da paastaae at der i den angivne Størrelse skal være et uendeligt antal Deele forhaanden, som kunde svare til den uendelige Deling: At Leddernes Tal heller ikke kan blive uendeligt sees §. 14.

§. 18.

End videre er det just falskt, hvad man skulle lægge til Grund, nemlig at en saadan saa kaldet uendelig Række nogensinde kunde blive fuldkommen af lige Storhed med et endeligt Tal. Deres Natur er just tvert derimod, til Exempel $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$ &c. $= 1$. hvem seer ikke at den Lov, som foreskrives denne og deslige Rækker just indbefatter, at af det, som endnu mangler paa den fulde Størrelse som skal udtømmes, deraf maa ikke tages mere, end en vis Deel og altsaa maa altid en Deel blive tilbage og følgelig er det en Vei at nærme sig til det bestemte hele, men aldrig at naae det. Ville en sige: Man kan jo i Tankerne forestille sig alle de øvrige

Led

Led at være der lige til o, da bliver dette enten en umuelig Fiction, (thi det kom da ud paa det samme, som vi allerede har igiendrevet i foregaaende §. nemlig at der skulle være et uendeligt antal Deele forhaanden for at strække til en uendelig Deling) eller det vil sige saa meget, at naar man har continueret Rækken ubestemt, saa længe man vil, indtil det som er tilbage bliver ukiendelig lidet, giør man et hastigt Spring over til o, som ellers ikke nogensinde kunde naaes og derved paa eengang afgiør, hvad som ellers ikke kunde afgiøres paa den forrige Maade. Naar Achilles skal naae Krabben, hvilket Zeno fordum ville bevise at være umueligt, maa han ikke længer binde sig til den Lov, som Zeno foreskriver, og som indbefatter en fortgaaende Række, hvilken sætter forud at der altid maa blive noget tilbage baade af den Tid og det Rum, i hvilke han ellers kunde naa den, da dog begge kan blive fuldkomne, naar man tilsidst paa eengang tager det lidet ukiendelige, som er tilovers og som Rækken endnu ikke har opfyldt, heller ikke kan opfylde baade af Tid og Rum.

§. 19.

Den store Opfindelse af Calculo Differentiali, som i de senere Tider har giort saa stor Tieneste i alle Mathematiquens Deele, har just til Grund det saa kaldede uendelige lidet og følgelig skulle man ved første Øiekast troe at her fandt man noget, som kunde giøre os et saadant Begreb mueligt, men hvem seer ikke, at disse Differentialia indbefatter intet absolute, men lutter relative lidet; Saaledes er Differentiale af den Størrelse x, som ved et arbitraire Udtryk kaldes dx, intet andet end en ukiendelig liden Deel, som x antages at voxe eller formindskes. De sammensatte Størrelser Differentialia har samme Grund, for Exempel Differentiale af xy faaes ved at forestille sig at en Product af x og y voxer ukiendelig lidet, hvorved den Rectangel, de udgiør, ukiendelig lidet tager til, og i Steden for xy bliver = xy + ydx + xdx + dxdy, saa at den ukiendelige liden Tilvext eller Differentiale er = ydx + xdx + dxdy, hvilket ikke mere har noget absolute lidet i sig, end de af hvilke det er sammensat nemlig dx og dy, da man endog af det hele Udtryk udelader dxdy, som det der har et ukiendeligt Forhold mod de andre, der dog allerede ansees for ukiendelig smaa mod det hele. Og saaledes gaaer det til i alle Anvendelser af denne Calculo og hvem veed ikke, at man endog i Almindelighed kan forestille sig Differentialia Differentialium i en ubestemt Fortgang, saasom ddx, dddx 2c. hvilket ingen negter.

§. 20.

Det skulle maaskee synes, at jeg har opholdt mig alt for meget med at vise Umueligheden af et uendeligt Tal, en Sag, som saa mange tilstaaer og neppe af nogen bliver negtet, saa snart de tydelig skulle forklare sine Tanker derom, men det er maaskee ikke overflødigt, deels efterdi mange ofte udtrykker sig saa tvetydig i den Sag, at de skulle synes at have tænkt noget saadant, deels taler man ikke destomindre om absolute uendelige Mathematiske Størrelser og hvor kan en saadan tænkes uden tillige at antage et uendeligt Tal. Jeg holder for, at, er et uendeligt Tal i sit Væsen umueligt, saa er og en uendelig Mathematisk Størrelse umuelig og tvertimod, hvorom jeg endnu til ydermere Overbeviisning vil nævne et Par Ord. Tal er det Tegn, som giver tilkiende, hvor mange Deele en Mathematisk Størrelse indeholder, da enhver antagen Deel ansees som en Eenhed (§. 4.) er nu Tingen umuelig, negter vel ingen, at Tegnet, som skulle tilkiendegive samme, maa indbefatte en Umuelighed, i det mindste saa vidt som det anvendes til at betegne en umuelig Sag. Men det andet er end mere vigtigt, nemlig at Umueligheden af et uendeligt Tal tillige beviser, at ingen Mathematisk Størrelse kan være uendelig. Vel er det saa, at et arbitraire Tegns Umuelighed derfor ikke strax beviser at Tingen er umuelig, men saa snart som Tegnet skal have sin Grund i Tingens Væsen, falder Tingen selv bort tillige med Tegnet. Det er væsentlig i en Mathematisk Størrelse at dens Deele kan udtrykkes i Tal, lad Deelene blive flere, hvorved den voxer, maa Tallet og gaae fort og voxe (jeg sætter at Eenheden altid bliver den samme)

lad

lad den endelig blive uendelig stor, i Fald saadant var muueligt, maatte jo Deelenes Tal og Mangfoldighed og blive uendelig stor? men er da et saadant uendeligt Tal af Deele eller Mangfoldighed umuelig, saa bliver vel og den uendelig Storhed selv umuelig. Ville man sige (at jeg ikke skal gaae noget forbi) at et uendeligt Tal kan tænkes, som mueligt, endog det ikke kan udtrykkes; thi man kan ikke altid tydelig udtrykke enhver muelig Sag, saa ville man kun eftertænke, hvad som forhen er sagt, og lægge Mærke til at vi har beviist en uendelig Mangfoldigheds Umuelighed og at altsaa et uendeligt Tal i sit Væsen og ikke blodt dets Udtryk er umuelig, endskiønt det altid maa blive mueligt at enhver Størrelse paa nogen Maade skulle kunde udtrykkes ved Tal, naar man af andre Grunde har beviist at Deelenes Mangfoldighed altid er indskrænket, da der er intet som hindrer at jo Tallene kan gaae fort uden Ophør.

§. 21.

Ligesom Arithmetiquen fremviser intet, der bestyrker det selvtagne Begreb om en uendelig Mathematisk Størrelse, saaledes findes der heller ikke noget saadant i Geometrien. Den Forestilling Mathematici fra de ældste Tider af har giort sig om en Mathematisk Punkt, da de ikke engang har tillagt den en uendelig liden Størrelse, vidner, at de ikke med Sikkerhed har vovet sig til at ansee nogen Deel saa ringe, at den jo maatte have nogen Forhold til det hele og hvorved det hele kunde tabe eller vinde. Gaaer vi videre fra Punkter til Linier, da fattes det ikke, at man jo overalt hører tale om uendelige Linier og deres Uddragelse i Uendelighed og mon ikke dette da vidner om Virkeligheden af uendelige Mathematiske Størrelser og viser at et saadant Begreb er mueligt? Man kunde her svare, at da Umueligheden af enhver uendelig Mathematisk Størrelse allerede er beviist, kunde det uden Omsvøb anvendes paa denne besynderlige Tilfælde, men da en Linie er et saa beqvemt Exempel at forestille sig en Mathematisk Størrelse, vil vi og lidet opholde os derved.

§. 22.

§. 22.

En Linie, som enten paa een eller begge Sider ingen Punkt har, hvor den indgrendses, kaldes uendelig. At saadan individuelle tilværende Linie er umuelig kan med Sikkerhed bevises, naar man ikke vil negte de klareste Sandheder: 1) Skulle den ikke indgrendses paa bægge Sider tillige, maatte dens Deele ikke-allene være utællelige, men den maatte virkelig indeholde et tilstedeværende uendeligt antal Deele eller Mangfoldighed, men som dette er umueligt, bliver og en saadan Linie umuelig med mere som deraf kunde flyde (§. 14.) 2) At forestille sig en Linie, som endog kun til den eene Side skulle være saa udstrakt at den ikke videre skulle kunde udstrækkes, kan man ikke paa nogen Maade bevise at være muelig. Jeg vil ikke eengang tale om, hvad der kunde skee paa den Side, hvor Linien tog sin Begyndelse, hvilket de, der er af lige Tanker med mig, almindelig pleier at anmærke. De som ere Forfægtere af Uendeligheden skulle maaskee paastaae at den kunde være uendelig til den eene Side, om ikke til den anden og just deraf-slutte, at en uendelig Størrelse selv kan formeres og en Tid være større, end en anden, hvilket dog i sig selv var urimeligt, da enhver Størrelse maa enten være absolute uendelig, i Fald saadant var mueligt, eller absolute endelig, men jeg vil nu allene betragte den fra den anden Side og sætte at den virkelig er uendelig udstrakt, da kan jeg jo i den hele Strækning fort frem forestille mig visse Stykker og Deele af Linien? videre kan jeg uden Modsigelse forestille mig, at ethvert eller nogle af disse Stykker voxer uagtet Linien har sin bestandige Grendse paa den eene Side, maae da ikke de Deele, som gaaer til den uendelige Side allesammen flyttes videre ud og hvor var da den absolute uendelige Strækning forhen? hvilket kommer overeens, med hvad vi allerede i Almindelighed har viist (§. 7.) Ville man sige: Det uendelige selvgiorde hinder i de mellemværende Deeles Udbredelse, da var det kun at tage Tilflugt til det, man selv ingen Rede kunde giøre for, og mon man ikke paa saadan Maade ville komme til at sætte Grendser for Udbredelsen just paa den Side, hvor man ingen Grendser vil have? 3) Alt

hvad,

hvad, der er virkelig tilværende, maa være bestemt, altsaa, naar en Linie betragtes som virkelig, da er dens Dele bestemte, og mon man ikke deraf tør slutte til et endeligt antal Dele, og til een absolute endelig Linie? (§. 6, 9, 10, 14, 20.)

§. 23.

Man skulle maaskee synes at kunde giøre sig et mueligt Begreb om en uendelig Linie paa den Maade at man tillod at fraskiære samme, hvad Dele og hvor mange man ville, og dog skulle den derved aldrig udtømmes, eller dens virkelige Dele ere saa mange, at man dermed aldrig kunde komme til Ende. Men sættes ikke her aabenbare forud, at en saadan Linie kunde strække sig længer, end enhver endelig Linie? det var det samme som at ville sige: en uendelig Linie er muelig, fordi den er muelig. Hvor tør man sige, at den skal være længer end alle endelige Linier, som kunde skiæres fra den, da den, som en tilværende Linie, maa være een iblandt dem (§. 12.) Man lader sig bedrage deraf, at man virkelig taler om noget bestemt og dog i sit Begreb har noget ubestemt, man har altid dette lige som i Baghold, at hvis den eller den endelige Linie opmaalte den, kunde man altid have Frihed at sætte den større, men er dette ikke at være ubestemt? og mon herved udbringes nogen absolute uendelig Længde? lad den kun existere, da har den strax sine bestemte Dele og altid maa kunde opmaales, men er der intet som bestemmer dens Størrelse, da bliver det altid en nye Linie for hver nye Bestemmelse, man giør, og udbringer man endnu aldrig derved nogen uendelig Linie.

§. 24.

Fremdeles skulle maaskee nogen ved Liniers Forestilling ville komme til det uendelige lidet, saa vel som det uendelige store, paa følgende Maade: Sæt at man har en Linie af en vis Længde, denne Linie kan deles uden Ophør, følgelig maa der i samme være et uendeligt antal uendelige smaa Dele, som skulle kunde strække til den uendelige Deling, dette er noget, som skulle kunde siges om enhver Mathematisk Størrelse i Almindelighed, men Følgen er urigtig og tilstrækkelig igiendrevet i den 17de §. Desuden sæt at der i en Linie af en Fods Længde var et uendeligt Antal tilstæde, spørges hvor stor blev Delenes Antal i en Linie af 2de Fod? maatte det ikke blive dobbelt? naar Delene i første og sidste Fald sættes at være lige store hvilket de nødvendig maa være, naar de skulle tænkes at være absolute uendelig smaae.

§. 25.

De mange Slags Forandringer som Linier kan faae, endog de undertiden ved første Oiekast synes at lede os til noget uendeligt, vidner dog overalt, at der intet absolute Mathematice uendeligt kan tænkes, men det som haver Skin deraf, er lutter ubestemte Størrelser og relative overmaade store eller smaae. Saaledes heder det ofte, at i de Linier, som beskrives ved hielp af abscisser og semiordinater, bliver snart disse snart hine, snart bægge uendelige, men mon det vil sige andet, end at Liniens Natur tillader at man med disse maa gaae fort saa langt, som man vil? men derved bliver der dog aldrig noget uendeligt af. Sæt at de bægge ere uendelige, saa fører dog som ofteste Liniens Natur dette med sig, at Abscisse og Semiordinate ikke ere lige store, og bliver da ikke et uendeligt større end et andet? Videre lad en ret Linie være udstrakt i det uendelige, og lad os fingere, at en krum Linie følger den fort frem i Uendelighed, hvis Bøininger og mangfoldige Krumminger ei allene efter Behag kan antages, men endog forestilles at skee efter visse Love, lad os da sætte, at den krumede Linie bliver udstrakt og rectificeret, maa da ikke dens Grendser gaae videre end den rette Linies? og hvor kan da denne være absolute uendelig? Jeg veed ikke, hvad det skulle hielpe paa Sagen at sige: De bleve uendelige og grendseløse bægge toe, uagtet den eene var større end den anden? Man ville derved tilstaae at intet kan være absolute uendeligt, men naar saa er, maa det jo være absolute endeligt? Ville man sige det var nok, at bægge vare større end enhver endelig, som kunde tænkes, saa var dette at statuere at en vis given Linie eller Størrelse kunde være noget imellem en absolute endelig og absolute uendelig, men at det sidste altid er umueligt og det første altid nødvendigt i Mathematiske Størrelser, og altsaa al Middel-Stand deri udelukket, kan sees af hvad vi forhen har beviist (§. 6. 7. 9. 12.) thi som een eeneste maa den have sit visse bestemte antal Dele, følgelig kan Mangfoldigheden af Delene ikke andet, end være absolute endelig. Som mindre, end en anden maa den være indskrænket og have sine Grændser. Hvori skulle da den Middel-Stand bestaae? maaskee deri, at den ikke i Tal kunde udtrykkes, men endog dette er uden Grund; thi intet hindrer at Tallene jo kan gaae fort, saavidt man vil (§. 14. 20.) og hvorfor skulle ikke enhver indskrænket Linie kunde opmaales og optælles ved nogen anden indskrænket Linie? Vel kan incommensurables Størrelsers **Forhold indbyrdes** ikke fuldkommen udtrykkes ved Tal, dog kan hver for sig udtrykkes ved Linier og disse paa mangfoldige Maader deles og Delene igien benævnes med Tal. Forresten, var der noget absolute lidet til, da blev det en commensurable Unitet for alle Størrelser.

§. 26.

Vil vi nøiere betragte de adskillige Symptomata, som Linier kan faa, saa vidt, som samme beskrives efter visse Love formedelst Absciffer og Ordinater, giver de vel ofte Anledning til at tale om det saa kaldede uendelige, men alligevel giver de os aldrig noget Begreb om et virkeligt uendeligt. De Symptomata, som helst skulle føre nogen til at tænke paa et uendeligt stort eller lidet, er at en Linie enten formedelst Ordinatens eller Absciffens Fortgang bliver uendelig eller hvor Differentialia af Semiordinat og Absciffe synes at faae et uendeligt Forhold til hinanden. Sæt at Semiordinatens Værdi, som vi vil kalde y, er saa stor som en vis Function af x, hvorved betegnes Absciffen, hvis y ved Forandringerne af x skal blive noget uendeligt, fremkommer denne Function af x i følgende Gestalt, enten at y er $=\frac{z}{o}$ eller $=\infty$. Ved z forstaaer jeg, hvad Størrelse det maatte være og ved ∞ enhver saa kaldet uendelig Størrelse, i hvad Grad den maatte være. For Exempel en

Hyperbel henført til sine Asymptoter defineres $y = \frac{a^2}{x}$ hvis nu x bliver $= o$, er $y = \frac{a^2}{o}$ hvilket igien siges at være $= \infty$, da det dog virkelig vil sige noget andet; thi den rette Betydning heraf er at y voxer fort frem, medens x nærmer sig til o; men i den Punkt, hvor x virkelig bliver $= o$, lader y af at være til, taber sin Natur og det, som kommer i Steden for Semiordinaten er en Asymptot, som ikke bestemmer nogen Punkt i Hyperbolen, derimod, hvor liden Deel man beholder tilbage af x, er y en virkelig og bestemt Semiordinat; derfore skeer det ogsaa at et saa kaldet uendeligt, der fremkommer under den Gestalt $\frac{z}{o}$ kan ligesaa vel være affirmative, som negative lige som o selv, da derved just kan skee en Overgang fra det eene Tegn til det andet, hvilket giver tilkiende at Størrelsen i bægge Tilfælde i de Punkter lader af at være. Herved bestyrkes og det, som allerede i Almindelighed er sagt §. 15.

§. 27.

Hvis y derimod bliver uendelig ved det at Functionens Tæller bliver uendelig, har det sig vel paa en anden Maade, men bliver derfor intet virkelig uendeligt. Lad os atter forestille os en Hyperbel, hvis Absciße og Semiordinate ikke tages i Asymptoterne, da $ay^2 = abx + bx^2$, saasnart nu x bliver uendelig stor, bliver y ligeledes uendelig og altsaa $y = \infty$. Her vedbliver y at være den samme i sin Natur, som den har været, hvor meget x voxer, allene at den voxer tillige og lige saa lidet, som man da kan bringe x ud til noget virkelig uendeligt, lige saa lidet y; end videre er det mærkeligt i dette og mangfoldige slige Tilfælde, at dy har til dx et endeligt Forhold, endog x tages uendelig og følgelig maa den krumme Linie og Semiordinaten overskiære og indgrendse hinanden paa samme Tid, da man kalder begge uendelige og er da ikke i det mindste Udtrykket urigtigt, omendskiønt man giør sig rigtigt Begreb om Tingen? (§. 3.)

§. 28.

Een af Linierne bliver og ofte overmaade liden, men derfor ikke noget absolute uendelig lidet; at en Størrelse, som y, bliver uendelig liden, som man kalder det, pleier at skee enten under denne Form $y = \frac{o}{z}$ eller $y = \frac{z}{\infty}$ disse tvende Udtryk passerer ogsaa for eet og det samme, men er det dog ikke fuldkommen. Det første betægner, at y lader aldeles af at være til, saasom i en Ellipsi, hvor $ay^2 = abx - bx^2$, og flere slige, maa y blive slet ingen, saa snart $x = a$, men et absolute intet giver aldrig det, som skulle hee-de uendelig lidet. Derimod i det foregaaende Exempel af Hyperbolen henført til sine Asymptoter, hvor $y = \frac{a^2}{x}$, der som x voxer til noget overmaade stort ∞, bliver $y = \frac{a^2}{\infty}$, men dette vil just sige at y aldrig bliver noget absolute intet; thi den krumme Linie kan ikke nogensinde fuldkommen løbe sammen med sin Asymptote, men jo større x bliver, jo mere nærmer den sig dertil, og jo mindre bliver y, men hverken y eller x bliver derved noget absolute uendeligt.

§. 29.

Andre Symptomata, som Linier kan faae, saasom at være cuspidatæ, at have puncta contrarii flexus, største og mindste ordinatas, giver lige saa lidet Grund til at statuere noget absolute uendeligt, endog det i disse Tilfælde hender overalt, at snart differentiale af x, snart af y bliver enten uendelig stort eller uendelig lidet. At nogen af dem i sig selv ikke kan være uendelig, har vi alt seet (§. 19. 14.) men ikke engang deres indbyrdes Forhold, som her sees paa, giver os idee om noget uendeligt Tal, eller Størrelse; thi hvor som helst det skeer, at det Udtryk, som viiser Forholdet mellem dx og dy eller ddy, betegnes at den eene Størrelse lader af at være, der falder den hen til o og altsaa ophører alt Forhold mellem dem (§. 15. 26. 27. 28.) da den anden, som ikke bliver $= o$, i visse Maader forandrer sin Natur og bliver Assymptote eller Tangent.

§. 30.

Af Linier dannes Vinkler og Planer, og af disse igien Legemer, men intet af det alt forsyner os med noget Beviis for virkelig uendelige Størrelser, endog Evclides 3 Bog 16 Prop. synes at have beviist noget saadant i Henseende til Vinkler, da han viser, at den Vinkel, som indsluttes mellem en Circul-Bue og dens Tangent er den mindste af alle muelige spidse Vinkler, ligeledes har man villet demonstrere, at en Circul eller en ret Linie ikke rører en anden Circul i mere, end en eeneste Punkt, og da den dog virkelig synes at komme den nær, saa skulle man ved første Oiekast troe, at deraf maatte følge, at man herved kunde giøre sig Begreb om noget virkelig uendelig lidet, men vi skal see, at dette, ligesom andet, forsvinder.

§. 31.

Allerførst er det at merke, at ingen Deel enten af en krum eller ret Linie, naar den virkelig er en Deel deraf, kan være noget absolute uendelig lidet, som af alt det foregaaende er at slutte. At enhver Linie, hvor liden den end maatte være, altid videre kan deles, har og af andre i een og anden Anledning været beviist. Lad for Exempel 4re saadanne Partikler, som holdes for udelelige sættes ved hinanden og udgiøre en Deel af en Circul, lad der og fra sammes yderste Deele trækkes Linier til Centrum, saasnart man da fra samme Centro beskriver en Concentrisk Circul, hvis radius er mindre end en fierde Deel af den første, saa bliver Buen mellem de toe Linier i den mindre Circul ikke saa stor, som een af de 4re Deele, der vare antagne, som uendelig smaae og ganske udelelige.

§. 32.

Naar altsaa dette er unægtelig, at ingen virkelig Deel er udelelig, saa kan en virkelig Tangent heller aldrig berøve nogen virkelig Deel af en Circul eller anden krum Linie, efter som den

altid

altid maatte røre mere, end een Punkt, og da laae den strax inden for Circulen. See Evclid. 3 Lib. Prop. 2. hvilket skulle synes at være paradox og stridig mod det man ellers taler, nemlig at saadanne Linier kan røres i en eeneste Punkt, men det har sig dog virkelig saaledes, at de ikke kan røres uden af en Linie af samme Figur, da deres Krumhed, saa længe, som den sættes at være fuldkommen, forskandser dem mod al berørelse, og der bliver intet tilbage, som skulle kunde berøres, uden en Mathematisk Punkt, som aldeles forsvinder. Saaledes kan for Ex. tvende Kugler ligge saa nær ved hinanden, at deres Centres Distance ikke bliver større, end Summen af bægges Radier, og dog rører ikke den eene nogen virkelig Deel af den anden. Sagen er denne: Distancerne paa bægge Sider mellem Tangenten og den krumme Linie bliver alt mindre og mindre jo nærmere man kommer det som kaldes Rørings-Punkten, men just da forsvinder denne Distance, naar Rørings-Punkten selv forsvinder og ikke udgiør nogen virkelig Deel af den krumme Linie. Dette er dog i sig selv ikke mere underligt, end at en Linie, som deler og overskiær en anden, ikke borttager nogen Deel deraf, men at bægge Stykkerne tilsammenlagt er just lige saa stor, som den hele Linie, og den eene borttager ingen virkelig Deel af den anden, endog de overskiær hinanden.

§. 33.

Evclides har altsaa meget mere beviist, at en Circul ikke kan røres i nogen virkelig Punkt, end at den røres i en eeneste. Dog overlades gierne enhver at udtrykke Sagen saaledes, at den krumme Linie røres af Tangenten i en Mathematisk Punkt, naar man kun ikke gaaer videre, da det falder alt ud til Mathematiske Punkter og Linier, som ingen virkelig Deel indtager af det hele, endog de alligevel har sin Nytte, som man veed, til at bestemme Directioner og Grendser, lige som vi forhen har seet at de Arithmetiske Udtryk $\frac{0}{1}$ og $\frac{1}{0}$ har sin Nytte, endog de for sig selv betragtet betyder intet, eller dog noget andet, end de pleier at antages for.

Men

Men derimod, saasnart der viges fra den Mathematiske Strænghed, da bestaaer vel siælden nogen krum Linie for den største Deel af andet, end mangfoldige smaae rette Linier, og da kan Tangenterne gierne røre virkelige, uagtet smaae, umærkelige og ubestemte Deele, hvilke dog alle Tider betragtede, som existerende og Physiske, maa være bestemte, ja endog, naar man vil finde Tangenternes Direction og den krumme Linies Rectification, antager man den som sammensat af mangfoldige smaae rette Linier, der selv ere sammensatte; thi Elementet af Buen pleier forestilles, som Hypothenusa i en Ret-Vinklet Triangel $= \sqrt{dx^2 + dy^2}$ lad nu end være at dx og dy som Differentialer af Abscisse og Semiordinate vare uendelige smaae, saa bliver dog $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ større. Derfore kan den Maade at qvadrere og rectificere krumme Linier treffe gandske nøiagtig i Henseende til Physiske krumme Linier, endog den ikke kan naae det fulde Maal af de Mathematiske.

§. 34.

Hvad den anden Post angaaer, hvor Euclides synes at have fundet og demonstreret en absolute uendelig liden Vinkel, da er der meget, som derimod kan siges. Det første, som og til intet giør den hele Satz, er dette, at der er slet ingen retlined Vinkel imellem en Tangent og en Circul eller hvad anden krum Linie, man tager. En Vinkel, som skulle være en viss Deel af en ret Vinkel eller 90°, saadan som Euclides forestiller det, kan slet ikke tænkes uden, som den der dannes udaf 2de rette Liniers Sammenstød; naar man altsaa forestiller sig, at Linien efter den yderste Strænghed er krum i sine mindste Deele, kan der umuelig blive nogen Vinkel af, som skulle kunde udmaales med en virkelig retlined Vinkel; thi at sammenligne krumlinede Vinkler med retlinede, er det samme, som at maale heterogenea med hinanden. Derimod vil man forestille sig en krum Linie, som den der bestaaer af en mængde smaae rette Linier, da kan Tangenten just ligge i en af disse, hvilken altsaa ingen Vinkel giør med samme, men den næstfølgende

liden

liden Linie, som og er ret, giør en Vinkel med Tangenten, som gierne kan deles, eller, i Fald Tangenten traf paa de toe smaae rette Liniers sammenstødende Punkt, da kan Vinklerne mellem den og disse gierne deles, derimod mellem en Tangent og en fuldkommen krum Linie er ingen Vinkel, der kan ansees som en Deel af en anden retlined Vinkel. For det andet det Rum, som Evclides saaledes forestiller at ikke kunde deles, og slutter deraf at den er den mindste af alle spidse Vinkler, kan dog paa andre Maader deles, til Beviis, at, fordi noget forestiller sig vore Tanker, som absolute uendelig stort eller lidet, vi derfor ikke strax skulle ansee det, som en Grund til deraf at slutte noget absolute mathematisk uendeligt. Saaledes veed enhver, at, dersom man antager en Punkt i samme Diameter, hvormed den første Circul er beskrevet og med en større Radius igiennem Rørings Punkten beskriver en større Circul, da rører den hverken Tangenten eller den forrige Circul, uden i den Mathematiske Rørings Punkt og forresten gaaer imellem bægge og altsaa deler det imellem dem værende Rum (a). For det 3die Tangentens Natur er denne, at den skal være den krumme Linie saa nær, som en ret Linie kan komme den uden at skiære den, og hvor vil man da trække en anden Linie, som og er ret, derimellem eller nærmere. Man kan vel forestille sig Distancen mellem en krum Linie og dens Tangent fra den saa kaldte Mathematiske Rørings Punkt at kunde deles ved Mathematiske Punkter, men deraf følger ikke at disse skal kunde forbindes sammen ved en ret Linie, som trækkes fra den Mathematiske Rørings Punkt, saa at der synes at være mere i Conclusionen end i Præmisserne, naar man paa saadan Maade vil finde den allermindste retlinede spidse Vinkel, da Sagens Natur selv er derimod. Det samme, som Evclides har villet beviise om Cirkler, giælder lige saa vel, saa vidt som det har sin Rigtighed, om alle krumme Linier, hvis Natur medfører

(a) Jeg har ikke holdet det fornøden enten her eller i det foregaaende at tegne de Figurer, som supponeres, saasom samme forhen ere overalt bekiendte og i Tankerne læt kan forestilles.

fører en fortgaaende Bøyning i deres Direction; thi foruden at man kan forestille sig, at en krum Linies mindste Deele stæmmer overeens med smaae Circul-Stykker, der har deres radium osculi, maa man tillige betænke, at enhver krum Linies Bøyning fra Tangenten er langt anderledes beskaffen end en ret Linies Bøyning. De krumme Liniers Bøyning fra Tangenten, omendskiønt den efter Liniernes Natur kan være større og gaae fortere frem i een, end i en anden, saa skeer den dog ved en successive Fremgang og tager sin begyndelse fra o, saa snart derimod en ret Linie er bøiet af fra Tangenten, som er en ret Linie, det maa være under hvor liden Vinkel det være vil, saa bliver den overalt den samme, og Afbøiningen selv er ikke vorende, endskiønt Distancen mellem Linierne bliver større, ikke heller kan Afbøiningen siges at tage sin Begyndelse fra o. Og, om vi end sætter at Tangenten ved en fremflydende Bevægelse dreier sig om Rørings Punkten, saa dog, da Linien er ret og maa have en Længde, hvor liden den er og den Vinkel, den beskriver maa have en Størrelse, saa snart som den er til, kan man altid forestille sig, at den krumme Linie, som i alle sine mindste Deele er krum og bøier sig nærmere Tangenten, maa og komme denne nærmere i de Punkter, som ligger Rørings Punkten nærmere, da en ret Linie, hvor liden den er, altid kan blive Chorda i den krumme Linie. Altsammen vidner om den ubestemte fortgaaende Delelighed og at intet er absolute uendelig lidet.

§. 35.

Hvad saa vel Planer, som Legemer angaaer, da vil jeg ikke opholde mig med videre besynderlig Undersøgelse i Henseende til dem, for at ikke igientage, hvad som hidindtil er sagt. Enhver seer lættelig, at disse, som Mathematiske Størrelser maa kunde udvides og formindskes. Det er ellers værd at mærke, at man her endog undertiden taler om Planer og Legemer, som til en Side synes at være uendelige, og dog bevises at være lige store med en vis endelig Størrelse, saasom i Hyperbolen, Rectangelen af den saa kaldede uendelige Asymptote og en Semiordinate parallele med den anden Asymptote er just saa stor, som Hyperbolens Potentz og de Legemer, som ved disses Omveltning om den eene Side dannes, bliver og lige store, uagtet det eene siges at have en uendelig Strækning, men det andet en endelig. Men disse uendelige Rum er intet andet, end ubestemte Rum i Henseende til Figuren og vil sige dette, at lige saa meget, som deres Dimensioner paa en Side formeres, saa meget formindskes de paa en anden, og følgelig kan de, hvorvidt man vil gaae, blive stændig lige med et endeligt og bestemt Rum. Overalt sees endog heraf, at enhver Mathematisk Størrelse, om den end paa nogen Maade forestiller sig som uendelig, er dog intet andet, end en blodt endelig Størrelse.

§. 36.

Endnu maa jeg saa kort, som muelig, berøre 2de Poster denne Sag angaaende, hvoraf ellers maaskee skulle giøres Indvendinger mod det, som her er handlet. Det eene er, hvorledes en Mathematisk Størrelse kan være sammensat af saadanne Deele, der dog immerfort selv ere delelige. Det andet, hvorledes den kan voxe eller aftage.

Hvad det første angaaer, kunde maaskee nogen tænke: Hvis Sammensættelsen ikke omsider skulle standse i de uendelige og udelelige smaae Deele, da blev der lutter Sammensættelse og intet som var sammensat (et Argument, som Philosophi endog i en anden Anledning, hvor der ikke tales om den blodte Mathematiske Udstrækning har villet betiene sig af, og, da nogle derhos har indseet Mueligheden af den fortgaaende Mathematiske Delelighed, har deraf, som man veed, reist sig megen Strid, med hvis Undersøgelse jeg paa dette Sted ei vil opholde mig) men den hele Vanskelighed oploses ved det, jeg har anmærket §. 17, naar man kun iagttager den vigtige Forskiæl mellem virkelig at være uendelig og at gaae frem uden Ende eller Ophør. I en Mathematisk Størrelse er ingen uendelig Delelighed ei heller noget tilstædeværende uendeligt antal Deele; thi dette er viist at være umueligt og hvortil man aldrig kan komme. Lad nu ikke destomindre Størrelsen være delelig fort frem uden Ophør som den virkelig er, saa kan man dog derved aldrig savne det, hvoraf Størrelsen er sammensat, der bliver jo altid virkelige Deele, hvorvidt man end gaaer? saaledes kan man sige at en Fod er sammensat af 12 Tommer, som ere dens virkelige Deele og Eenheder, hver af disse igien af 12 Linier, som og bliver virkelige Deele af Foden og saa videre frem, og hvori bestaaer da den Fare for at mangle Eenheder eller det virkelige, hvoraf Størrelsen skulle være sammensat, da det altid bliver umueligt derved at bringe Deelene til 0 eller intet? Vil man sige: derved forfalder man jo til Progressum in infinitum, som er umuelig, da svares, at denne, naar den ikke forstaaes som en Progressus in infinitum, der allerede er virkelig uendelig, som er umuelig, indbefatter da intet umueligt; thi den bliver da ikke uden en Progressus sine fine eller en Fortgang uden Ophør, som er gandske fattelig og muelig. Mathematiske Størrelser ere derfore altid sammensat af virkelige Deele, men som efter behag kan antages snart større og derved bliver færre i Tallet, snart mindre, hvorved de bliver igien flere i Tallet.

§. 37.

Hvad det andet angaaer, nemlig hvorledes en Størrelse kan voxe eller formindskes, da kan man forestille sig bægge Deele at skee paa 2de Maader. Den eene vil jeg kalde en pludselig, den anden en fremflydende Tilvext, og hvad der siges om denne, nemlig Tilvexten, kan med liden Forandring ogsaa anvendes paa Formindskelsen. Sæt, at den Størrelse A er voxet ved Tillæg af B, hvis alt hvad der er i B er kommen paa eengang uden mindste Forskiæl i Tiden, da kan den hele B siges at være kommen ved en pludselig Tilvext. At saadan Tilvext er muelig, kan ikke nægtes. Samme fører heller ikke til noget Begreb om det uendelige. Sæt derimod at det Tillæg B saaledes er kommet dertil, at alle dets

Deele

Deele uden afbrydelse har fulgt paa hinanden og det saadan, at hvad Deel man vil sætte i B, da er den bleven til i en forskiællig Tid fra enhver anden Deel, da kan det kaldes en fremflydende Tilvext. Lad os forestille os en Figur beskreven ved Absciſſe og Semiordinat og at Tiden i hvilken Tilvexten skeer, udtrykkes ved Absciſſen, men at Semiordinatens Tilvext forestiller Tilvexten af Størrelsen; Eftersom altsaa en Linie og enhver Mathematisk Størrelse er delelig uden Ophør, saa kan og en forskiellig Semiordinat, det er en forskiellig Størrelse, altid svare til forskiellige Absciſſer, det er, til forskiellige Tider, de maa tages saa ringe og smaae, som de vil, og det endog efter en vis Lov; thi jeg seer intet, som hindrer, at jo en Linie, enten den er krum eller ret, kan i sine allermindste Deele beholde sin væsentlige Beskaffenhed, følgelig er heller ikke den fremflydende Tilvext umuelig, men deraf følger dog ikke at den skulle skee ved absolute uendelige smaae Tillæg, hvilket ei allene med Sikkerhed kan sluttes af alt, hvad forhen er handlet i denne Tractat, og paa adskillige Maader kunde bevises, men kan og strax sees af den Forestilling, vi her har giort; thi over selv samme foromtalte Absciſſe kunde jo beskrives mangfoldige forskiellige Linier, naar Semiordinaterne gik frem efter forskiellige Love, da det, som skulle giore den uendelige liden Tilvext i Semiordinaterne, maatte under samme uendelige liden Tilvext af Absciſſen, blive forskielligt og altsaa et uendeligt mindre end et andet, eller sæt at Linien, som beskrives, er kun en eeneste, men at Absciſſen i hver Punkt er større end den dertil svarende Semiordinat, saa at denne voxer langsommere end hin, hvis da Absciſſen voxer ved et saa kaldet absolute uendelig lidet Tillæg, maatte Semiordinatens Tilvext, som svarede til samme, være mindre, end uendelig liden, hvilket var umueligt. I en fremflydende Tilvext voxer altsaa Størrelsen hverken ved Tillæg af 0; thi deraf kunde intet udkomme, ei heller ved Tillæg af absolute uendelige smaae Deele; thi disse ere umuelige, men ved sammensatte Deele, som altid paa en vis Maade svarer til Tidens Deele, men hverken denne eller de er absolute uendelig liden, nok at deres Natur medfører, at de overalt under en vis Lov svarer til hinanden og er forresten ubestemt, hvor store eller smaae Deele man vil sammenligne med hinanden.

§. 38.

Jeg haaber altsaa tilstrækkelig at have beviist, at alt, hvad der i egentlig Mening skulle kaldes det Mathematiske uendelige, er umueligt, da saadant Begreb vel fornemmelig har reist sig af urigtige Benævnelser og Forestillinger, saasom at det, man kalder det **Mathematiske uendelige store eller lidet**, nogensinde kan bringes videre, end til at blive det overmaade store eller det **umærkelige lidet**, at det man ubestemt kalder en uendelig Størrelse, og hvis Forestilling i mange Tilfælde giør god Tieneste, undertiden bliver anseet som en enkel Størrelse, ligeledes at Mueligheden af en bestandig Fortgang skulle medføre det uendelige, at det Forhold 1:0 eller det Udtryk $\frac{1}{0}$ har for sig selv betragtet nogen Betydning og skulle kunde betegne noget virkelig uendeligt med mere, som i det foregaaende er viist. Jeg haaber ogsaa, at saadan Overbeviisning ikke skal være unyttig enten i de Mathematiske Videnskaber selv eller i andre, hvor den maaskee kan giøre vigtig Tieneste.

Om